Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις

Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Στην §2.2 δώσαμε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$: λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x,x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$.

Παρατήρηση 4.1.1. Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι η εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0),\varepsilon).$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακτίνα $\delta > 0$ ώστε η μπάλα (του X) με κέντρο το x_0 και ακτίνα δ να απεικονίζεται, μέσω της f, μέσα στη μπάλα (του Y) με κέντρο το $f(x_0)$ και ακτίνα ε.

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση οδηγούμαστε στον εξής χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ μέσω των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων των X και Y (υπενθυμίζουμε ότι η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$).

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

(γ) *Αν F είναι κλειστό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν το $f^{-1}(G)$ είναι κενό τότε το συμπέρασμα ισχύει.

Αν όχι, έστω $x \in f^{-1}(G)$. Τότε, $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(f(x), \varepsilon) \subseteq G$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq G$, δηλαδή $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Συνεπώς, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Είναι άμεσο από τη σχέση $f^{-1}(Y\setminus A) = X\setminus f^{-1}(A)$: έστω F κλειστό υποσύνολο του Y. Τότε, το $Y\setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Από την υπόθεσή μας, το $f^{-1}(Y\setminus F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως, $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$. Αφού το $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

(γ) $\Rightarrow$ (α) Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη μπάλα $B = B(f(x),\varepsilon)$. Τότε το $Y \setminus B$ είναι κλειστό και από την υπόθεσή μας το $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ είναι επίσης κλειστό, δηλαδή το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό. Επιπλέον, $x \in f^{-1}(B)$ διότι $f(x) \in B$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Ισοδύναμα, $f(B(x,\delta)) \subseteq B = B(f(x),\varepsilon)$. $\square$

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε αντίστοιχους χαρακτηρισμούς των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$ μέσω της κλειστής θήκης και του εσωτερικού:

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(γ) *Για κάθε $B \subseteq Y$ ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.*

(δ) *Για κάθε $C \subseteq Y$ ισχύει $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$.*

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $A \subseteq X$ και $y \in f(\overline{A})$. Τότε, υπάρχει $x \in \overline{A}$ με $y = f(x)$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα $f(x_n) \to f(x) = y$. Όμως, $f(x_n) \in f(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $y \in \overline{f(A)}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Αν $B \subseteq Y$, θέτοντας $A = f^{-1}(B)$ στο (β) έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}.$$

Ο δεύτερος εγκλεισμός προκύπτει από την $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ που ισχύει για κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ και κάθε $B \subseteq Y$.

Τώρα, από την $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B}$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $C \subseteq Y$. Από την Πρόταση 3.2.13 έχουμε

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ = \overline{X \setminus f^{-1}(C)} = \overline{f^{-1}(Y \setminus C)}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\overline{f^{-1}(Y \setminus C)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus C})$ παίρνουμε

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus C}).$$

Επιπλέον, ισχύει

$$f^{-1}(\overline{Y \setminus C}) = f^{-1}(Y \setminus C^\circ) = X \setminus f^{-1}(C^\circ).$$

Συνεπώς,

$$X \setminus (f^{-1}(C))^\circ \subseteq X \setminus f^{-1}(C^\circ),$$

δηλαδή $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$.

(δ) ⇒ (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του Y. Θέτοντας $C = G$ στην (δ) παίρνουμε

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G^\circ) \subseteq [f^{-1}(G)]^\circ$$

διότι $G = G^\circ$. Έπεται ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. Από την πρόταση 4.1.2 η f είναι συνεχής. □

4.2 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 4.2.1 (ομοιόμορφη συνέχεια)**.** Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, η συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής: για κάθε $\delta > 0$, αν επιλέξουμε $x_\delta = \frac{1}{\delta}$ και $y_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, τότε $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά

$$|p(x_\delta) - p(y_\delta)| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Από τον ορισμό έπεται ότι η p δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παραδείγματα 4.2.2. (α) Κάθε συνάρτηση $f : (X,\delta) \to (Y,\sigma)$ από ένα σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x, y \in X$ και $\delta(x,y) < \frac{1}{2}$ έπεται ότι $x = y$, άρα $\sigma(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon$. □

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι κάθε ακολουθία $a : \mathbb{N} \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Η συνάρτηση *απόστασης από το σύνολο* A είναι η $d_A : X \to \mathbb{R}$ με

$$t \mapsto \mathrm{dist}(t, A) \equiv \inf\{\rho(t,a) : a \in A\}.$$

Η d_A είναι ομοιόμορφα συνεχής: μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad |d_A(t) - d_A(s)| \leq \rho(t,s)$$

για κάθε $t, s \in X$. Τότε, για δοθέν $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι αν $t, s \in X$ και $\rho(t,s) < \delta$ ικανοποιείται η $|d_A(t) - d_A(s)| < \delta = \varepsilon$.

Απόδειξη της $(*)$: Έστω $t, s \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$d_A(t) \leq \rho(t, a) \leq \rho(t, s) + \rho(s, a).$$

Συνεπώς, ο $d_A(t) - \rho(t, s)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\rho(s, a) : a \in A\}$. Έπεται ότι $d_A(t) - \rho(t, s) \leq d_A(s)$. Δηλαδή,

$$d_A(t) - d_A(s) \leq \rho(t, s).$$

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι

$$d_A(s) - d_A(t) \leq \rho(t, s),$$

απ' όπου παίρνουμε την $(*)$. □

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία «μηδενίζεται στο άπειρο», δηλαδή $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό).

Ο χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών (που γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό) μεταφέρεται χωρίς καμία αλλαγή στο πλαίσιο των μετρικών χώρων:

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $(X, \rho), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Αν $(x_n), (z_n)$ είναι ακολουθίες στον X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$, τότε $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και θεωρούμε ακολουθίες (x_n), (z_n) στον X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } x, z \in X \text{ και } \rho(x, z) < \delta \text{ τότε } \sigma(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

Αφού $\rho(x_n, z_n) \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, z_n) < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $\rho(x_n, z_n) < \delta$ και $x_n, z_n \in X$, οπότε $\sigma(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

Αντίστροφα: αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } \delta > 0 \text{ υπάρχουν } x_\delta, z_\delta \in X \text{ με } \rho(x_\delta, y_\delta) < \delta \text{ αλλά } \sigma(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon.$$

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, z_n \in X$ ώστε $\rho(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ αλλά $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $(x_n), (z_n)$, έχουμε $\rho(x_n, z_n) \to 0$ αλλά $\sigma(f(x_n), f(z_n)) \not\to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, συνεπώς έχουμε αποδείξει την αντίστροφη κατεύθυνση. □

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Θεωρούμε τις προτάσεις:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X σε βασικές ακολουθίες του Y.*

(γ) *Η f είναι συνεχής.*

Τότε, ισχύουν οι συνεπαγωγές (α) $\Rightarrow$ (β) *και* (β) $\Rightarrow$ (γ).

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, σ). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ρ–βασική, συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $m, n \geq n_0$ τότε $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Αρκεί να δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Θεωρούμε την ακολουθία $(y_n) = (x, x_1, x, x_2, x, x_3, \ldots)$. Η (y_n) συγκλίνει στο x (γνωστό) άρα είναι βασική. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $(f(y_n))$ είναι επίσης βασική. Αλλά, η υπακολουθία $(f(y_{2n-1}))$ της $(f(y_n))$ είναι σταθερή και ίση με $f(x)$, επομένως συγκλίνει στο $f(x)$. Αφού η $(f(y_n))$ είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, συγκλίνει, και μάλιστα στο $f(x)$ (αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριό της συμπίπτει με το όριο κάθε υπακολουθίας της). □

Παρατηρήσεις 4.2.5. (α) Μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν απεικονίζει κάθε βασική ακολουθία σε βασική ακολουθία (άρα το αντίστροφο της συνεπαγωγής (β) $\Rightarrow$ (γ) δεν ισχύει). Αν θεωρήσουμε την $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε αυτή είναι συνεχής, αν όμως θεωρήσουμε την βασική ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $(0, +\infty)$ τότε αυτή δεν απεικονίζεται σε βασική ακολουθία, αφού $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

(β) Επίσης, δεν ισχύει το αντίστροφο της συνεπαγωγής (α) $\Rightarrow$ (β), δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση να απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες και να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $p(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρ' όλα αυτά, αν έχουμε μια βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ τότε, όπως έχουμε δει στον Απειροστικό Λογισμό, αυτή είναι και συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \to x$ και, επειδή η p είναι συνεχής, $p(x_n) \to p(x)$, δηλαδή η $(p(x_n))$ είναι συγκλίνουσα και άρα βασική.

4.2.1 Συναρτήσεις Lipschitz

Ορισμός 4.2.6. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ και $C > 0$. Λέμε ότι η f είναι C–Lipschitz (ή αλλιώς, ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C > 0$) αν για κάθε $x, y \in X$ ισχύει

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq C\, \rho(x, y).$$

Λέμε ότι η f είναι Lipschitz αν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με κάποια σταθερά $C > 0$.

Παρατηρήσεις 4.2.7. (α) Κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \sqrt{t}$, τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz για καμία θετική σταθερά (άσκηση).

(β) Συμβολίζουμε με $\mathrm{Lip}(X,Y)$ την κλάση όλων των συναρτήσεων Lipschitz $f : X \to Y$. Στην περίπτωση $Y = \mathbb{R}$, γράφουμε απλώς $\mathrm{Lip}(X)$ αντί για $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$. Η κλάση $\mathrm{Lip}(X,Y)$ είναι πάντοτε μη κενή διότι περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Η κλάση $\mathrm{Lip}(X)$ είναι επίσης μη κενή και, γενικά, περιέχει «πολλές» συναρτήσεις: αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, τότε η συνάρτηση απόστασης $d_A : X \to \mathbb{R}$ με $d_A(x) = \mathrm{dist}(x,A)$ είναι 1–Lipschitz.

(γ) Αν $f,g \in \mathrm{Lip}(X)$, τότε $f+g \in \mathrm{Lip}(X)$ και αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda f \in \mathrm{Lip}(X)$. Με άλλα λόγια, η τριάδα $\big(\mathrm{Lip}(X),+,\cdot\big)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{C}(X)$.

(δ) Για κάθε συνάρτηση $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$ ορίζουμε

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \inf\big\{C > 0 : \sigma(f(x),f(y)) \le C\,\rho(x,y),\ x,y \in X\big\}.$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να δείξει ότι

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup\left\{\frac{\sigma(f(x),f(y))}{\rho(x,y)} \mid x,y \in X, x \neq y\right\}$$

και ότι $\sigma(f(x),f(y)) \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}\rho(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$.

Παραδείγματα 4.2.8. (α) Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη παράγωγο είναι Lipschitz.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $|f'(x)| \le C$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τυχόντες πραγματικούς αριθμούς x,y με $x < y$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ ώστε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi).$$

Τότε, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le C$, ή αλλιώς, $|f(x)-f(y)| \le C\,|x-y|$. □

Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $\sin, \cos, \arctan$ είναι Lipschitz.

(β) Έστω X γραμμικός χώρος. Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι 1–Lipschitz, άρα ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Η απόδειξη είναι απλή: για την ανισότητα $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$ χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $|f'(x)| = |\cos x| \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ για την ανισότητα $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \ge 1$ χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Πρόταση 4.2.9. *Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ δύο μετρικοί χώροι και έστω $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$. Τότε, η f απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y. Πιο συγκεκριμένα, αν η f είναι C–Lipschitz, τότε για κάθε φραγμένο υποσύνολο A του X,*

$$\mathrm{diam}(f(A)) \le C\mathrm{diam}(A).$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ φραγμένο. Τότε, $\mathrm{diam}(A) < \infty$. Έστω $x,y \in A$. Τότε,

$$\sigma(f(x),f(y)) \le C\rho(x,y) \le C\mathrm{diam}(A) < \infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς $x,y \in A$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(f(A)) \le C\mathrm{diam}(A)$. □

Σημείωση 4.2.10. Η υπόθεση ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz δε μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας. Αν θεωρήσουμε την ταυτοτική συνάρτηση $I : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$ όπου δ η διακριτή μετρική, τότε αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R},\delta)$ αλλά δεν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

4.3 Ισομετρίες, ομοιομορφισμοί, ισοδύναμες μετρικές

4.3.1 Ισομετρίες

Ορισμός 4.3.1 (ισομετρία)**.** Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *ισομετρία* (*isometry*) αν διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή

$$\sigma(f(x),f(y)) = \rho(x,y)$$

για κάθε $x,y \in X$.

Παρατηρήσεις 4.3.2. (α) Κάθε ισομετρία είναι 1-1 συνάρτηση.

(β) Κάθε ισομετρία είναι συνάρτηση Lipschitz.

(γ) Αν υπάρχει ισομετρία $f : X \to Y$, τότε γράφουμε $X \overset{\text{isom}}{\hookrightarrow} Y$ και λέμε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον Y. Αν, επιπλέον, η f είναι επί, τότε λέμε ότι οι χώροι X,Y είναι ισομετρικοί (και σαν μετρικοί χώροι «ταυτίζονται»).

(δ) Μπορούμε να ορίσουμε ισομετρίες οι οποίες να μην είναι επί. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον *τελεστή της δεξιάς μετατόπισης* (shift operator) $S_r : \ell_2 \to \ell_2$ με

$$S_r(x_1,x_2,x_3,\ldots) = (0,x_1,x_2,\ldots),$$

τότε αυτός είναι ισομετρία από τον ℓ_2 στον εαυτό του, η οποία δεν είναι επί.

Παραδείγματα 4.3.3. (α) (*Μεταφορές*) Οι απεικονίσεις $\sigma_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma_u(x) = x + u$ και $\tau_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\tau_u(x) = -x + u$ (όπου $u \in \mathbb{R}$) είναι ισομετρίες. Γενικότερα, κάθε μεταφορά $T_y : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $T_y(x) = x + y$, όπου $y \in \mathbb{R}^n$, είναι ισομετρία επί.

(β) Αν $n < m$ τότε $\ell_2^n \overset{isom}{\hookrightarrow} \ell_2^m$.

Πράγματι, η απεικόνιση $i : \ell_2^n \to \ell_2^m$ με

$$i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0}_{m-\text{θέσεις}})$$

είναι ισομετρία.

4.3.2 Ισοδύναμες μετρικές

Ορισμός 4.3.4 (ισοδύναμες μετρικές)**.** Έστω X ένα μη κενό σύνολο και ρ, σ δύο μετρικές στο X. Οι ρ και σ λέγονται *ισοδύναμες* (και γράφουμε $\rho \sim \sigma$) αν ορίζουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή $\rho \sim \sigma$ αν και μόνον αν ισχύει η ισοδυναμία

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} x.$$

Πρόταση 4.3.5. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και ρ, σ δύο μετρικές στο X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Οι ρ, σ είναι ισοδύναμες.*

(β) *Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X, \rho) \to (X, \sigma)$ είναι αμφισυνεχής. Δηλαδή, η I είναι συνεχής και η I^{-1} επίσης.*

(γ) *(Κριτήριο Hausdorff) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε $B_\rho(x, \delta_1) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$ και $B_\sigma(x, \delta_2) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$.*

(δ) *Το $G \subseteq X$ είναι ρ–ανοικτό αν και μόνον αν είναι σ–ανοικτό.*

(ε) *Το $F \subseteq X$ είναι ρ–κλειστό αν και μόνον αν είναι σ–κλειστό.*

Απόδειξη. (α) ⇒ (β). Απλό από την υπόθεση και την αρχή της μεταφοράς για τις I και I^{-1}.

(β) ⇒ (γ). Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in X$. Αφού η I είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $I(B_\rho(x, \delta_1)) \subseteq B_\sigma(I(x), \varepsilon)$ ή ισοδύναμα $B_\rho(x, \delta_1) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$. Όμοια, αφού η I^{-1} είναι συνεχής υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $B_\sigma(x, \delta_2) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$.

(γ) ⇒ (δ). Υποθέτουμε ότι το G είναι ρ–ανοικτό. Θα δείξουμε ότι είναι σ–ανοικτό. Αν $x \in G$, αφού το G είναι ρ–ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G$. Από την υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\sigma(x, \delta) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$. Τελικά, $B_\sigma(x, \delta) \subseteq G$. Αφού το $x \in G$ ήταν τυχόν, το G είναι σ–ανοικτό. Όμοια δείχνουμε την άλλη κατεύθυνση.

(δ) ⇒ (ε). Απλό: θεωρούμε το συμπλήρωμα του F και εφαρμόζουμε την υπόθεση ότι ισχύει το (δ).

(ε)⇒ (α). Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $\sigma(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το σύνολο $F = \{y \in X : \sigma(y, x) \geq \varepsilon_0\}$. Τότε το F είναι σ–κλειστό και από την υπόθεση έπεται ότι είναι ρ–κλειστό. Επιπλέον, έχουμε $x_{k_n} \in F$ (εκ κατασκευής) για $n = 1, 2, \ldots$ και $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Έπεται ότι $x \in F$, άρα $\sigma(x, x) \geq \varepsilon_0$, άτοπο. Συνεπώς, $x_n \xrightarrow{\sigma} x$. Όμοια δείχνουμε την άλλη κατεύθυνση. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, αν στο ίδιο σύνολο έχουμε δύο ισοδύναμες μετρικές τότε οι δύο μετρικοί χώροι που προκύπτουν έχουν ακριβώς τα ίδια ανοικτά σύνολα. Λέμε ότι οι ισοδύναμες μετρικές παράγουν ακριβώς *την ίδια τοπολογία*.

Πρόταση 4.3.6. *Αν ρ είναι μια μετρική στο σύνολο X, τότε υπάρχει ισοδύναμη μετρική σ στο X η οποία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη μετρική $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $x, y \in X$. Η σ είναι φραγμένη μετρική και $\rho \sim \sigma$, αφού $\sigma(x_n, x) \to 0$ αν και μόνον αν $\rho(x_n, x) \to 0$. □

4.3.3 Ομοιομορφισμοί

Ορισμός 4.3.7 (ομοιομορφισμός)**.** Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Η f λέγεται *ομοιομορφισμός* (*homeomorphism*) αν είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής (δηλ. η f και η f^{-1} είναι συνεχείς). Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, σ) λέγονται *ομοιομορφικοί* και γράφουμε $X \overset{\text{hom}}{\sim} Y$ ή $X \simeq Y$.

Παρατηρήσεις 4.3.8. (α) Η σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ μετρικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Έστω ρ και σ δύο μετρικές στο σύνολο X. Αν οι ρ, σ είναι ισοδύναμες, τότε οι μετρικοί χώροι (X, ρ) και (X, σ) είναι ομοιομορφικοί (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης). Το αντίστροφο δεν ισχύει: μπορούμε να βρούμε σύνολο X και μετρικές ρ, σ στο X ώστε οι χώροι (X, ρ) και (X, σ) να είναι ισομετρικοί, αλλά οι ρ, σ να μην είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε το σύνολο $X = c_{00}$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών και ορίζουμε τη συνάρτηση $T : c_{00} \to c_{00}$ με

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, 0, \ldots).$$

Μέσω του T ορίζουμε μια νέα νόρμα στον c_{00} ως εξής: $\|y\|_T = \|Ty\|_\infty$ για $y \in c_{00}$. Τότε, οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_T)$ είναι ισομετρικοί (μέσω της T) αλλά οι μετρικές που επάγουν οι νόρμες δεν είναι ισοδύναμες στον c_{00} (άσκηση).

Πρόταση 4.3.9. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνάρτηση 1-1 και επί. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιομορφισμός.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνον αν $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$.*

(γ) *Το $G \subseteq X$ είναι ρ–ανοικτό αν και μόνον αν το $f(G) \subseteq Y$ είναι σ–ανοικτό.*

(δ) *Το $F \subseteq X$ είναι ρ–κλειστό αν και μόνον αν το $f(F) \subseteq Y$ είναι σ–κλειστό.*

(ε) *Η $d(x,y) = \sigma(f(x), f(y))$ ορίζει μετρική στο X ισοδύναμη με την ρ.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 4.3.10. *Κάθε μετρικός χώρος (X,ρ) είναι ομοιομορφικός με έναν φραγμένο μετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση 4.3.6 και την παρατήρηση 4.3.8(β). □

Θεώρημα 4.3.11. *Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος εμφυτεύεται[1] στον κύβο του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$.*

Απόδειξη. Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : X \to \mathcal{H}^\infty$ η οποία είναι 1-1 και η $F^{-1} : F(X) \to X$ είναι επίσης συνεχής. Τότε, $X \simeq F(X) \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

Θυμίζουμε ότι ο $\mathcal{H}^\infty$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $y : \mathbb{N} \to [-1,1]$ με τη μετρική $d(y,y') = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|y(n) - y'(n)|$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι για τον (X,ρ) ισχύει $\rho(x,y) \leq 1$ για κάθε $x,y \in X$ (αυτό μας το εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση). Έστω $D = \{x_n : n = 1,2,\ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : X \to \mathcal{H}^\infty$ με $F(x) = y$ όπου $y(n) = \rho(x,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. Η F είναι 1-1.

Έστω $x,y \in X$ με $F(x) = F(y)$ δηλαδή, $\rho(x,x_n) = \rho(y,x_n)$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχει $x_n \in D$ ώστε $\rho(y,x_n) = \rho(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(y,x_n) < \varepsilon$$

και αφού το ε είναι τυχόν συμπεραίνουμε ότι $\rho(x,y) = 0$, δηλαδή $x = y$.

Ισχυρισμός. Η F είναι συνεχής (μάλιστα Lipschitz).

Θα δείξουμε ότι ισχύει $d(F(x),F(y)) \leq \rho(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$, όπου d η μετρική του κύβου του Hilbert. Έχουμε

$$d(F(x),F(y)) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|\rho(x,x_n) - \rho(y,x_n)| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\rho(x,y) = \rho(x,y).$$

Τέλος, δείχνουμε ότι η $F^{-1} : F(X) \to X$ είναι συνεχής δείχνοντας ότι αν $a_m, a \in X$ και $F(a_m) \xrightarrow{d} F(a)$ τότε $a_m \xrightarrow{\rho} a$ (το ζητούμενο προκύπτει από την αρχή της μεταφοράς).

[1] Λέμε ότι ο X εμφυτεύεται στον Y αν υπάρχει $f : X \to Y$ συνεχής, 1-1 και η $f^{-1} : f(X) \to X$ είναι επίσης συνεχής. Με άλλα λόγια, αν ο X είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του Y.

Πράγματι: έστω ότι $F(a_m) \xrightarrow{d} F(a)$. Αφού η d είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $\lim\limits_{m\to\infty} F(a_m)(n) = F(a)(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(a_m, x_n) = \rho(a, x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό στο X, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Επιπλέον, αφού $\rho(a_m, x_{n_0}) \to \rho(a, x_{n_0})$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ τότε $\rho(a_m, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + \rho(a, x_{n_0})$. Συνεπώς, αν $m \geq m_0$ τότε

$$\rho(a_m, a) \leq \rho(a_m, x_{n_0}) + \rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\rho(a, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

δηλαδή $a_m \xrightarrow{\rho} a$ καθώς $m \to \infty$. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα ζεύγους μετρικών χώρων που είναι ομοιομορφικοί αλλά δεν είναι ισομετρικοί και με κάποιες παρατηρήσεις επί των ομοιομορφικών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα 4.3.12. (α) Τα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\mathbb{R}$ (και τα δύο με τη συνήθη μετρική) είναι ομοιομορφικά μέσω της συνάρτησης $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, όμως δεν είναι ισομετρικά διότι $\mathrm{diam}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \pi$ ενώ $\mathrm{diam}(\mathbb{R}) = \infty$.

(β) Διαστήματα τα οποία «μοιάζουν» είναι ομοιομορφικά, δηλαδή $(0,1) \simeq (a,b)$, $[0,1) \simeq [a,b) \simeq (c,d]$ και $[0,1] \simeq [a,b]$. Για την πρώτη και τρίτη περίπτωση έχουμε τον ομοιομορφισμό $f(t) = a + t(b-a)$. Για τη δεύτερη έχουμε ότι η συνάρτηση $g : [0,1) \to (c,d]$ με $g(t) = d - t(d-c)$ είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής.

(γ) Το $(0,1)$ *δεν* είναι ομοιομορφικό με το $[0,1)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : [0,1) \to (0,1)$ ομοιομορφισμός και θέτουμε $c = f(0)$. Τότε $0 < c < 1$ και επίσης η $f|_{(0,1)} : (0,1) \to (0,1) \setminus \{c\}$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή τα $(0,1)$ και $(0,c) \cup (c,1)$ είναι ομοιομορφικά. Όμως τότε, το $\mathbb{R}$ είναι κι αυτό ομοιομορφικό με το $(0,c) \cup (c,1)$, επομένως το $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δυο ανοικτών (μη τετριμμένων) υποσυνόλων του, το οποίο είναι άτοπο διότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα που να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά (άσκηση από το 3ο Κεφάλαιο). □

4.4 Βασικά αποτελέσματα για συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους

4.4.1 Το λήμμα του Urysohn

Θεώρημα 4.4.1 (Urysohn). *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A, B κλειστά υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(α) $0 \leq f(x) \leq 1$ *για κάθε* $x \in X$.
(β) $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in A$.
(γ) $f(x) = 1$ *για κάθε* $x \in B$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, A)}{\mathrm{dist}(x, A) + \mathrm{dist}(x, B)},$$

η οποία είναι καλά ορισμένη διότι τα A, B είναι κλειστά και $A \cap B = \emptyset$ (αν ο παρονομαστής μηδενιζόταν για κάποιο $x \in X$ τότε θα είχαμε $x \in \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B$). Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in B$. □

Ορισμός 4.4.2. Έστω A, B δύο ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ).

(α) Τα A, B *διαχωρίζονται* αν υπάρχουν ανοικτά G, H ώστε $A \subseteq G,\ B \subseteq H$ και $G \cap H = \emptyset$.

(β) Τα A, B *διαχωρίζονται πλήρως* αν διαχωρίζονται από ανοικτά G, H όπως στο (α) και επιπλέον ισχύει $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$.

Πρόταση 4.4.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και E, F δύο ξένα κλειστά υποσύνολα του X. Τότε τα E, F διαχωρίζονται πλήρως.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα βασιστεί στο λήμμα του Urysohn. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in E$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in F$. Θέτουμε $U = (-1/3, 1/3)$ και $V = (2/3, 4/3)$). Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) Τα $G = f^{-1}(U),\ H = f^{-1}(V)$ είναι ανοικτά στον X διότι η f είναι συνεχής.

(β) $E \subseteq G,\ F \subseteq H$.

(γ) Ισχύει ότι $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$. Πράγματι, αν $x \in \overline{G}$ θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο G. Τότε, $f(x_n) \in U$ δηλαδή $f(x_n) < 1/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_n) \to f(x)$, άρα $f(x) \leq 1/3$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν $y \in \overline{H}$ τότε $f(y) \geq 2/3$. Άρα, ισχύει $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$. □

4.4.2 Διαμερίσεις της μονάδας

Ορισμός 4.4.4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$. Ο *φορέας* (*support*) της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Θεώρημα 4.4.5 (διαμέριση της μονάδας). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $U_1, \ldots, U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Τότε, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to [0, 1],\ i = 1, \ldots, k$ με την ιδιότητα $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ για $i = 1, \ldots, k$ και $\phi_1(x) + \cdots + \phi_k(x) = 1$ για κάθε $x \in X$.*

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.4.6. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $U_1, \ldots, U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$. Τότε, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $W_1, \ldots, W_k$ ώστε $\overline{W_i} \subseteq U_i$ για $i = 1, \ldots, k$ και $X = W_1 \cup \cdots W_k$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει W_1 ανοικτό ώστε $\overline{W_1} \subseteq U_1$ και $X = W_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$. Κατόπιν, το συμπέρασμα έπεται με επαγωγή. Παρατηρούμε ότι το $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το κλειστό $X \setminus U_1$. Συνεπώς, διαχωρίζονται πλήρως. Ειδικότερα, υπάρχει ανοικτό W_1 ώστε $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k) \subseteq W_1$ και $\overline{W_1} \cap \overline{X \setminus U_1} = \emptyset$ (γιατί, αν W_2 είναι ανοικτό με $U_1^c \subseteq W_2$ και $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$, τότε $\overline{W_1} \cap \overline{X \setminus U_1} \subseteq \overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$). Άρα,

$$\overline{W_1} \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus U_1)} \subseteq X \setminus (X \setminus U_1) = U_1.$$

Τέλος, ισχύει $X = W_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_i, $i = 1, \ldots, k$ ώστε $\overline{V}_i \subseteq U_i$ και $X = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Για τον ίδιο λόγο υπάρχουν ανοικτά W_i, $i = 1, \ldots, k$ ώστε $\overline{W}_i \subseteq V_i$ για $i = 1, \ldots, k$ και $X = \bigcup_{i=1}^k W_i$. Από το λήμμα του Urysohn, για κάθε $i = 1, \ldots, k$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_i : X \to [0,1]$ ώστε $f_i(x) = 1$ για κάθε $x \in \overline{W}_i$ και $f_i(x) = 0$ για κάθε $x \notin V_i$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) > 0$ για κάθε $x \in X$ διότι $X = W_1 \cup \cdots \cup W_k$ άρα $x \in W_i$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k$ οπότε $f_i(x) = 1$.

(ii) $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq U_i$ για $i = 1, \ldots, k$, διότι αν $x \in X$ ώστε $f_i(x) \neq 0$ τότε $x \in V_i$. Άρα,

$$\mathrm{supp}(f_i) = \overline{\{x : f_i(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ με $\phi_i = \frac{f_i}{f_1 + \cdots + f_k}$. Αυτές είναι καλά ορισμένες και $\mathrm{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ (εξηγήστε γιατί). Τέλος, $\sum_{i=1}^k \phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. □

4.4.3 Ταλάντωση και σημεία συνέχειας

Ορισμός 4.4.7 (ταλάντωση)**.** Έστω $(X,\rho), (Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Αν $A \subseteq X$, η *ταλάντωση* της f στο A ορίζεται ως εξής:

$$\tau_f(A) = \mathrm{diam}(f(A)) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : x, y \in A\}.$$

Παρατηρήσεις 4.4.8. (α) Από τον ορισμό, $0 \leq \tau_f(A) \leq +\infty$.

(β) Αν η f δεν είναι φραγμένη στο A τότε $\tau_f(A) = \infty$.

(γ) Αν $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ και $A \subseteq X$ τότε

$$\tau_f(A) = \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in A\} \leq 2 \sup_{a \in A} |f(a)|.$$

(δ) Αν $f \in \mathrm{Lip}(X,Y)$, τότε η ταλάντωση της f σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένη και μάλιστα[2]

$$\tau_f(A) \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \mathrm{diam}(A).$$

(ε) Η συνάρτηση $\tau_f : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ είναι «αύξουσα»: αν $A \subseteq B$ τότε $\tau_f(A) \leq \tau_f(B)$.

[2] Δείτε την Παρατήρηση 4.2.7 (δ).

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $x \in X$ και ορίζουμε ως ταλάντωση της $f : X \to Y$ στο x την ποσότητα

$$\tau_f(x) := \inf\{\tau_f(V) : V \text{ ανοικτό, } x \in V\}.$$

Θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο αν και μόνον αν η ταλάντωσή της στο σημείο αυτό είναι μηδενική. Για το σκοπό αυτό δείχνουμε πρώτα ένα λήμμα το οποίο μας δίνει μια πιο εύχρηστη περιγραφή της $\tau_f(x)$.

Λήμμα 4.4.9. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ και $x \in X$. Τότε, για την ταλάντωση της f στο x ισχύει η ισότητα*

$$\tau_f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{diam}(f(B_\rho(x,\varepsilon))) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tau_f(B_\rho(x,\varepsilon)).$$

Απόδειξη. Έστω V ανοικτό με $x \in V$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_0) \subseteq V$. Από τη μονοτονία της ταλάντωσης έχουμε $\tau_f(B(x,\varepsilon_0)) \le \tau_f(V)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (0,\infty) \to [0,\infty]$ με $g(\varepsilon) = \tau_f(B(x,\varepsilon))$ η οποία είναι αύξουσα. Άρα το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0^+} g(\varepsilon)$ υπάρχει στο $[0,+\infty]$ και

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_f(B(x,\varepsilon)) \le \tau_f(B(x,\varepsilon_0)) \le \tau_f(V).$$

Έπεται ότι $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_f(B(x,\varepsilon)) \le \inf\{\tau_f(V) : V \text{ ανοικτό}, x \in V\} = \tau_f(x)$.
Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\tau_f(x) \le \tau_f(B(x,\varepsilon))$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, διότι το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό και περιέχει το x.
Άρα, $\tau_f(x) \le \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tau_f(B(x,\varepsilon))$. □

Θεώρημα 4.4.10. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ και $x \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *Η f είναι συνεχής στο x.*
(β) *Η ταλάντωση της f στο x είναι μηδενική, δηλαδή $\tau_f(x) = 0$.*

Απόδειξη. (α) ⇒ (β). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x,\delta)) \subseteq B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Από τη μονοτονία της διαμέτρου έχουμε

$$\mathrm{diam}(f(B(x,\delta))) \le \mathrm{diam}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \le \varepsilon.$$

Όμως,

$$\tau_f(x) = \lim_{r\downarrow 0} \mathrm{diam}(f(B(x,r))) \le \varepsilon$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\tau_f(x) = 0$.
(β) ⇒ (α). Υποθέτουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in X$ ώστε $\rho(x_\delta, x) < \delta$ και $\sigma(f(x_\delta), f(x)) \ge \varepsilon_0$. Άρα, $\tau_f(B(x,\delta)) \ge \varepsilon_0$ για κάθε $\delta > 0$. Τότε,

$$\tau_f(x) = \lim_{\delta\downarrow 0} \tau_f(B(x,\delta)) \ge \varepsilon_0.$$

□

Θεώρημα 4.4.11. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Συμβολίζουμε με $C(f)$ το σύνολο των σημείων του X στα οποία η f είναι συνεχής. Τότε, το $C(f)$ είναι G_δ–υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν και μόνον αν $\tau_f(x) = 0$. Άρα, $C(f) = \{x \in X : \tau_f(x) = 0\}$ ή ισοδύναμα

$$C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : \tau_f(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $B_n = \left\{x \in X : \tau_f(x) < \frac{1}{n}\right\}$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in B_n$. Παρατηρούμε ότι

$$\tau_f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \tau_f(B(x,\delta)) < \frac{1}{n}.$$

Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\tau_f(B(x,\delta)) < \frac{1}{n}$.

Ισχυρισμός. Ισχύει $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq B_n$ (άρα, το B_n είναι ανοικτό).

Πράγματι, έστω $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. Παρατηρούμε ότι $B\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq B(x,\delta)$. Αυτό ισχύει διότι, αν $z \in B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)$ τότε $\rho(z,x) \leq \rho(z,y) + \rho(y,x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\tau_f(y) \leq \tau_f\left(B\left(y, \frac{\delta}{2}\right)\right) \leq \tau_f(B(x,\delta)) < \frac{1}{n},$$

δηλαδή $y \in B_n$. □

Πόρισμα 4.4.12. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Συμβολίζουμε με $D(f)$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Τότε, το $D(f)$ είναι F_σ–υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Το $D(f)$ είναι το συμπλήρωμα του $C(f)$, που είναι σύνολο G_δ. Συνεπώς, είναι σύνολο F_σ.